

## Örnek:

$$f(x) = x^2 + 4x$$

fonksiyonunun  $[-2, 2]$  aralığındaki değişim oranı kaçtır?

$$\begin{aligned}\Delta y &= x(2) - x(-2) \\ &= (2^2 + 4 \cdot 2) - ((-2)^2 + 4 \cdot (-2)) \\ &= 16 - (-16) = 32 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$$\Delta x = 2 - (-2) = 4 \text{ olur.}$$

$f(x)$  fonksiyonunun  $[-2, 2]$  aralığındaki değişim oranı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{32}{4} = 8 \text{ bulunur.}$$

## Örnek:

$$f(x) = x^2 + 1$$

fonksiyonunun  $[a, a + 3]$  aralığındaki değişim hızı 7'dir.

Buna göre,  $a$  kaçtır?

$$\begin{aligned}\Delta y &= x(a + 3) - x(a) \\ &= [(a + 3)^2 + 1] - [a^2 + 1] \\ &= a^2 + 6a + 10 - a^2 - 1 = 6a + 9 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= (a + 3) - a \\ &= 3 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$f(x)$  fonksiyonunun  $[a, a + 3]$  aralığındaki değişim oranı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6a + 9}{3} = 2a + 3 \text{ olur.}$$

$$2a + 3 = 7$$

$$a = 2 \text{ bulunur.}$$

1.  $f(x) = x^2 + x$

fonksiyonunun  $[-1, 1]$  aralığındaki değişim oranı kaçtır?

A)  $\frac{1}{2}$  B) 1 C)  $\frac{3}{2}$  D) 2 E)  $\frac{5}{2}$

2.  $f(x) = x^2 + 1$

fonksiyonunun  $[1, a]$  aralığındaki değişim oranı 4'tür.

Buna göre,  $a$  kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.  $f(x) = x^2 + x$

fonksiyonunun aşağıdaki aralıkların hangisinde değişim oranı 5'tir?

A)  $[-1, 1]$  B)  $[-1, 2]$  C)  $[1, 2]$   
D)  $[1, 3]$  E)  $[2, 3]$

4.  $f(x) = \sin x - \cos 2x$

fonksiyonunun  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  aralığındaki değişim oranı kaçtır?

A)  $-\frac{2}{\pi}$  B)  $-\frac{3}{\pi}$  C)  $-\frac{4}{\pi}$  D)  $-\frac{5}{\pi}$  E)  $-\frac{6}{\pi}$

Örnek:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2, & x \geq 1 \\ x^2 + 4x, & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = 1$  apsisli noktasında türevli olup olmadığını inceleyiniz.

Süreklilik şartıyla başlayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x) = 5$$

$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 = 5$  olduğundan,

$f(x)$  fonksiyonu  $x = 1$  apsisli noktasında süreklidir.

Şimdi sağdan ve soldan türevleri inceleyelim.

$$x > 1 \text{ için } f(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(1^+) = 6$$

$$x < 1 \text{ için } f(x) = x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow f'(1^-) = 6$$

Buradan

$$f'(1^+) = f'(1^-) = 6$$

olduğundan  $f'(1) = 6$  bulunur.

Bu durumda  $f$  fonksiyonunun  $x = 1$  apsisli noktada türevi vardır.



Bu tarz sorularda kritik noktaların türevinin olup olmadığını bulmak için,

1. adım : Fonksiyonun kritik noktada sürekli olup olmadığını bakılır.

2. adım : Fonksiyonun kritik noktada sağdan ve soldan türevinin eşit olup olmadığını bakılır.

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = |x - 3|$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f'(3)$  değeri aşağıdakilerden hangidir?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) Yoktur.

2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x \geq 1 \\ 5x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f'(1)$  değeri aşağıdakilerden hangidir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Yoktur.

3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = |(x - 2)^2|$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f'(2)$  değeri aşağıdakilerden hangidir?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) Yoktur.

4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2, & x < 1 \\ 2x^2 + 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f'(1)$  değeri aşağıdakilerden hangidir?

- A) 16 B) 12 C) 8 D) 4 E) Yoktur.

Örnek:

Aşağıdaki dik koordinat sistemindeki  $d$  doğrusu  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiğinin  $A(4, 4)$  noktasındaki teğettir.



$g(x) = x \cdot f(x)$  olduğuna göre,  $g'(4)$  değerini bulalım.

$$g'(x) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$$

$$g'(4) = f(4) + 4 \cdot f'(4) \text{ olur.}$$

$f'(4)$  değeri  $y = f(x)$  fonksiyonuna  $x = 4$  apsisli noktadan çizilen  $d$  doğrusunun eğimidir.



$$f'(4) = \tan \alpha = m_d = \frac{4}{4} = \frac{1}{1} = 1 \text{ ve } f(4) = 4 \text{ olur.}$$

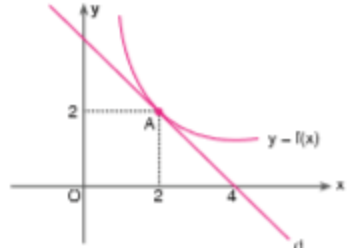
Bulunan bu değerler

$$g'(4) = f(4) + 4 \cdot f'(4)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$g'(4) = 4 + 4 \cdot 1 = 8 \text{ bulunur.}$$

1. Aşağıdaki dik koordinat sistemindeki  $d$  doğrusu  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiğinin  $A(2, 2)$  noktasındaki teğettir.



$g(x) = f^2(x)$  olduğuna göre,  $g'(2)$  değeri kaçtır?

- A) -8 B) -4 C) -2 D) 2 E) 4

2. Aşağıdaki dik koordinat sistemindeki  $d$  doğrusu  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiğinin  $A(-2, 2)$  noktasındaki teğettir.



$g(x) = \frac{f(x)}{x}$  olduğuna göre,  $g'(-2)$  değeri kaçtır?

- A)  $-\frac{3}{2}$  B) -1 C)  $-\frac{3}{4}$  D)  $-\frac{1}{2}$  E)  $-\frac{1}{4}$

## Türev Yardımıyla Bir Fonksiyonun Grafiğinin Çizimi

- Bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanım kümesine dikkat edilmelidir. Bu bölümde sadece polinom fonksiyonlarının grafikleri çizileceğinden polinom fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi olan gerçel sayılar kümesinde grafik çizimi yapılacaktır.
- Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunmalıdır.  $f(x) = 0$  denkleminin tek katlı köklerinde grafik x eksenini keserken çift katlı köklerinde x eksenine teğet olacaktır.
- Fonksiyonun  $x = 0$  apsisi noktasındaki değeri bulunarak y eksenini kestiği nokta tespit edilecektir.
- Fonksiyonun türevi yardımıyla varsa ekstremum noktaları bulunmalı ve artan ile azalan olduğu bölgeler incelenmelidir.

### Örnek:

$f(x) = x^3 - 3x^2$  fonksiyonun grafiğini çizelim.

#### 1. adım:

$x = 0$  için  $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$  olur.

(y eksenini  $(0, 0)$  noktasında keser.)

$y = 0$  için  $0 = x^3 - 3x^2$

$$0 = x^2(x - 3)$$

$$x = 0 \text{ veya } x = 3$$

çift katlı kök

(x eksenini  $(3, 0)$  noktasında keser. x eksenine  $(0, 0)$  noktasında teğettir.)

#### 2. adım:

f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları incelenirse

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2)$$

$$x = 0 \text{ veya } x = 2 \text{ olur.}$$

Ekstremler noktaları

x	0	2	
f'(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗
	artan	azalan	artan
	maks.	min.	

f(x) fonksiyonunun türevinin işaret tablosuna göre,

- f(x) fonksiyonu  $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$  aralığında artandır.
- f(x) fonksiyonu  $(0, 2)$  aralığında azalandır.
- f(x) fonksiyonunun  $x = 0$  apsisi noktasında maksimumu vardır ve maksimum değeri  $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$  olur.
- f(x) fonksiyonunun  $x = 2$  apsisi noktasında minimumu vardır ve minimum değeri  $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$  olur.



## TÜREV / Kalıfalık Testi I

1.  $f(x) = (x+3)^2 \cdot (x+1)$   
fonksiyonunun üzerindeki  $x = -1$  apsissli noktasındaki teğelinin eğimi kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.  $f(x) = x^3 + (k+1)x - 5$   
fonksiyonunun üzerindeki  $x = 1$  apsissli noktasından çizilen teğel  $x$  eksenıyla pozitif yönde  $135^\circ$ lik açı yapılığuna göre,  $k$  kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

3.  $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$   
fonksiyonunun üzerindeki  $(1, 4)$  noktasından çizilen teğelinin eğimi 3 olduğuna göre,  $a \cdot b$  çarpımı kaçtır?

A) -16 B) -14 C) -12 D) -10 E) -8

4.  $f(x) = x^2 + ax + b$   
parabolüne üzerindeki  $x = 1$  apsissli noktasına teğel olan doğru  $y = 4x$  olduğuna göre,  $a \cdot b$  çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

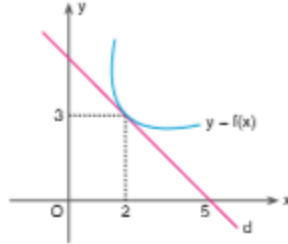
5.  $f$  fonksiyonuna üzerindeki  $(2, 7)$  noktasından çizilen teğelin denklemi  $y = (a-2)x + b$ 'dir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$$

olduğuna göre,  $a \cdot b$  çarpımı kaçtır?

A) 15 B) 12 C) 10 D) 8 E) 5

6. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde  $d$  doğrusu  $y = f(x)$  fonksiyonuna  $(2, 3)$  noktasında teğettir.



$$g(x) = x^3 + x \cdot f(x)$$

olduğuna göre,  $g'(2)$  değeri kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

7.  $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 2$   
fonksiyonunun gösterdiği eğrinin bir noktasındaki teğel doğrusunun denklemi  $y = 2$ 'dir.

Buna göre,  $a$  kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

8.  $f(x) = (3-x) \cdot (x+2) \cdot (x-1)$

Fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

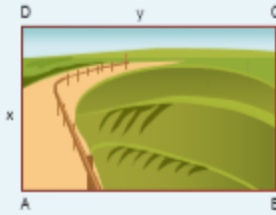
- A)  $f(x)$  fonksiyonunun üzerindeki  $x = -2$  apsissli noktasından çizilen teğel doğrusu sola yalıktır.  
B)  $f(x)$  fonksiyonunun üzerindeki  $x = 3$  apsissli noktasından çizilen teğel doğrusu sola yalıktır.  
C)  $f'(x)$  fonksiyonunun üzerindeki  $x = 3$  apsissli noktasından çizilen teğel doğrusu sola yalıktır.  
D)  $f'(x)$  fonksiyonunun üzerindeki  $x = -2$  apsissli noktasından çizilen teğel doğrusu sağa yalıktır.  
E)  $f'(x)$  fonksiyonunun üzerindeki  $x = 1$  apsissli noktasından çizilen teğel  $x$  eksenine paraleldir.



## uygulama

### Örnek:

Çevresi 200 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın alanının en çok kaç metrekare olduğunu bulalım.



Yandaki tarlanın çevresi 200 metre olsun.

$$2x + 2y = 200$$

$$x + y = 100$$

$$y = 100 - x \text{ olur.}$$

Alan (ABCD) =  $x \cdot y$  olduğundan bu ifadedeki  $y$  yerine  $y = 100 - x$  eşitliğini yazarsak

$$\text{Alan (ABCD)} = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2 \text{ elde edilir.}$$

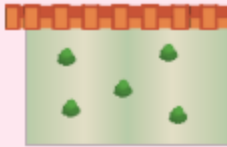
Bu ifadenin türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$(100x - x^2)' = 100 - 2x = 0$$

$$x = 50 \text{ olur.}$$

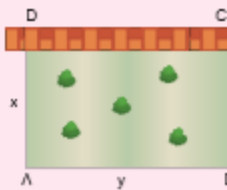
Bu değeri Alan(ABCD) =  $100x - x^2$  ifadesinde yerine yazarsak  $100 \cdot 50 - 50^2 = 2500$  metrekare bulunur.

### Örnek:



Yandaki şekilde verilen dikdörtgen biçimindeki bahçenin bir kenarında duvar bulunmaktadır. Bu bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilecektir.

Kullanılan telin uzunluğu 36 metre olduğuna göre, bahçenin alanının en çok kaç metrekare olacağını bulalım.



Kullanılan tel 36 metre olduğundan

$$2x + y = 36 \Rightarrow y = 36 - 2x \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan (ABCD)} &= x \cdot y \\ &= x \cdot (36 - 2x) \\ &= 36x - 2x^2 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Elde edilen ifadenin türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$(36x - 2x^2)' = 36 - 4x = 0$$

$$x = 9 \text{ olur.}$$

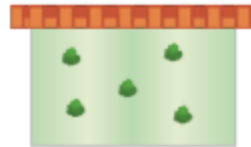
Bulunan değer elde ettiğimiz  $36x - 2x^2$  ifadesinde yerine yazılırsa

$$36 \cdot 9 - 2 \cdot 9^2 = 162 \text{ metrekare bulunur.}$$

1. Çevresi 120 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın alanı en çok kaç metrekaredir?

A) 500 B) 600 C) 700 D) 800 E) 900

- 2.

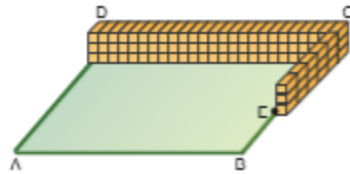


Yukarıdaki şekilde verilen dikdörtgen biçimindeki bahçenin bir kenarında duvar bulunmaktadır. Bu bahçenin diğer üç kenarına bir sıra tel çekilecektir.

Kullanılan telin uzunluğu 80 metre olduğuna göre, bahçenin alanı en çok kaç metrekaredir?

A) 400 B) 600 C) 800 D) 1000 E) 1200

- 3.



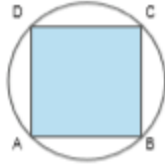
Dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin [DC] kenarına ve [BC] kenarının yarısına kadar olan kısmına bir duvar örülmüştür. Kenarların geriye kalan kısımlarına bir sıra tel çekilmiştir.

Kullanılan telin uzunluğu 90 metre olduğuna göre, bahçenin alanı en çok kaç metrekaredir?

A) 1350 B) 1250 C) 1200 D) 1000 E) 900

## Maksimum ve Minimum Problemlerinde Kullanılabilecek Kısa Yollar

- Bir çemberin içine çizilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenler



ABCD karedir.



$$|AB| = 2|BC|$$



OABC karedir.

şeklindedir.

- Bir çemberin içine çizilebilecek maksimum alanlı üçgenler



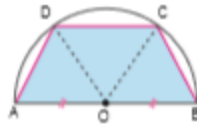
ABC ikizkenar  
dik üçgendir.



OAC ikizkenar  
dik üçgendir.

şeklindedir.

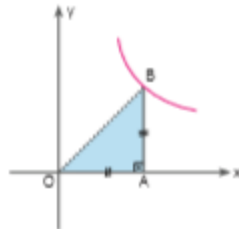
- Bir yarı çemberin içine çizilebilecek maksimum alanlı yamuk



Yamuk üç eşkenar  
üçgenden oluşur.

şeklindedir.

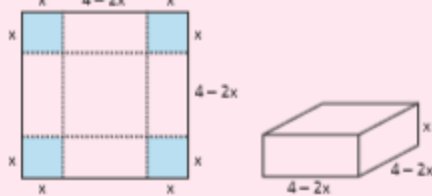
- $y = \frac{k}{x}$  eğrisinin orijine en yakın noktası B ise oluşturulabilecek AOB dik üçgeni ikizkenardır.



## Örnek:

Bir kenarı 4 metre olan kare biçimindeki bir kartonun köşelerinden özdeş kareler kesilerek kalan kısmı bükülüp üstü açık bir dikdörtgenler prizması elde edilmek isteniyor.

Bu prizmanın hacminin en büyük olması için kesilen karelerin bir kenarının kaç metre olacağını bulalım.



Kesilecek karelerin bir kenarının uzunluğu  $x$  alınırsa oluşan prizmanın tabanının bir kenarının uzunluğu  $4 - 2x$  ve yüksekliği  $x$  metre olur.

Hacim  $= (4 - 2x)^2 \cdot x$  olduğundan bu ifadenin türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

Önce ifadeyi düzenleyelim.

$$(4 - 2x)^2 \cdot x = (16 - 16x + 4x^2) \cdot x = 16x - 16x^2 + 4x^3 \text{ olur.}$$

Türev alınırsa

$$(16x - 16x^2 + 4x^3)' = 16 - 32x + 12x^2 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$(3x - 2)(x - 2) = 0$$

$x = \frac{2}{3}$  ve  $x = 2$  bulunur.

$x$	$\frac{2}{3}$	$2$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

max

Bu durumda hacmin en büyük değerine ulaşabilmesi için karelerin bir kenarı  $\frac{2}{3}$  metre olmalıdır.

## Örnek:

Taban yarıçapı 4 santimetre ve yüksekliği 12 santimetre olan bir dik koninin içerisine dik silindir yerleştirilecektir.

Bu silindirin hacminin en çok olabilmesi için yüksekliğinin kaç santimetre olacağını bulalım.



Yanda verdiğimiz silindirin hacmi  $\pi r^2 h$ 'dir.

ABC ve ADE üçgenleri benzer olduğundan

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{12-h}{12} = \frac{r}{4}$$

$$12 - h = 3r$$

$$h = 12 - 3r \text{ olur.}$$

Bulduğunuz bu ifadeyi hacim kuralında yerine yazalım.

$$\text{Hacim} = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 (12 - 3r) = \pi (12r^2 - 3r^3)$$

ifadesinin türevini alıp sıfıra eşitleyelim.

$$[\pi (12r^2 - 3r^3)]' = \pi (24r - 9r^2) = 0$$

$$\pi \cdot 3r(8 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \text{ ve } r = \frac{8}{3} \text{ olur.}$$

$r$	$0$	$\frac{8}{3}$
$f'(r)$	-	+
$f(r)$	↘	↗

max

Bu durumda silindirin hacminin en çok olabilmesi için  $r = \frac{8}{3}$  olmalıdır.

Bu değer  $h = 12 - 3r$  eşitliğinde yerine yazılırsa

$$h = 12 - 3 \cdot \frac{8}{3} = 4 \text{ santimetre bulunur.}$$



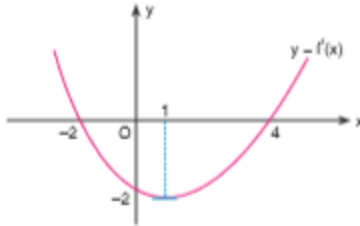
## TÜREV / Genel Tekrar Testi - 3

9.  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

fonksiyonuna üzerindeki  $x = 0$  apsisi noktasından çizilen normalin denklemleri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $3y - x + 6$       B)  $3y - x - 6$       C)  $2y - x - 4$   
D)  $y - 3x - 2$       E)  $y - x - 2$

10. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde  $y = f(x)$  fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A)  $f'(1) = 0$       B)  $f(0) < f(1)$       C)  $f(-5) < f(-3)$   
D)  $f'(5) > f'(-1)$       E)  $f''(0) < 0$

11. Çevresi 32 sanilmetre olan dikdörtgenin alanının alabileceği en büyük değer kaç sanilmetrekaredir?

- A) 72      B) 64      C) 56      D) 48      E) 40

12.  $f(x)$  fonksiyonunun üzerindeki  $A(2, f(2))$  noktasından çizilen teğelinin denklemleri  $y = 2x - 1$ 'dir.

$$g(x) = x \cdot f(x) + 4x$$

olduğuna göre,  $g'(2)$  değeri kaçtır?

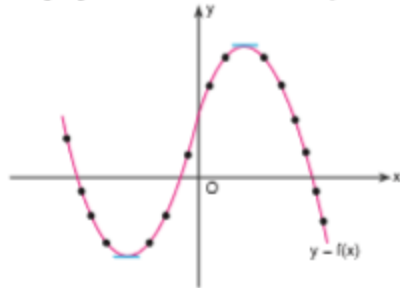
- A) 13      B) 12      C) 11      D) 10      E) 9

13.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+5) - f(h-1) + f(-1) - f(5)}{h}$

ifadelerinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $f'(5)$       B)  $f'(5) + f'(-1)$   
C)  $f'(-1)$       D)  $f'(-1) - f'(-5)$   
E)  $f'(5) - f'(-1)$

14. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği üzerinde 15 farklı nokta verilmiştir.



Buna göre, bu 15 noktadan kaç tanesi  $f(x) - f'(x) > 0$  şartını sağlar?

- A) 9      B) 8      C) 7      D) 6      E) 5

15.  $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6}$

fonksiyonunun ilürevli olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $\mathbb{R}$       B)  $(-6, 1)$       C)  $\mathbb{R} - \{-6\}$   
D)  $\mathbb{R} - \{-6, 1\}$       E)  $(-6, 1)$