

AYT
KONU ANLATIMLI

Baştan Sona
**LİMİT –
SÜREKLİLİK**

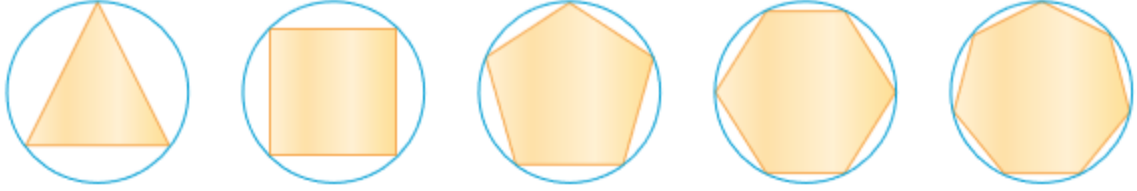
Ersen Örenler

- ✓ Konu Anlatımı
- ✓ Örnek Sorular
- ✓ Uygulama Alanları
- ✓ Kolaydan Zora Testler
- ✓ ÖSYM'nin Yeni Tarzı
- ✓ Full Video Çözümü



Limit Kavramı

Arşimet bir çemberin çevresini ve sınırladığı bölgenin alanını hesaplamaya çalışırken köşeleri çember üzerinde olan düzgün çokgenler çizmiştir.



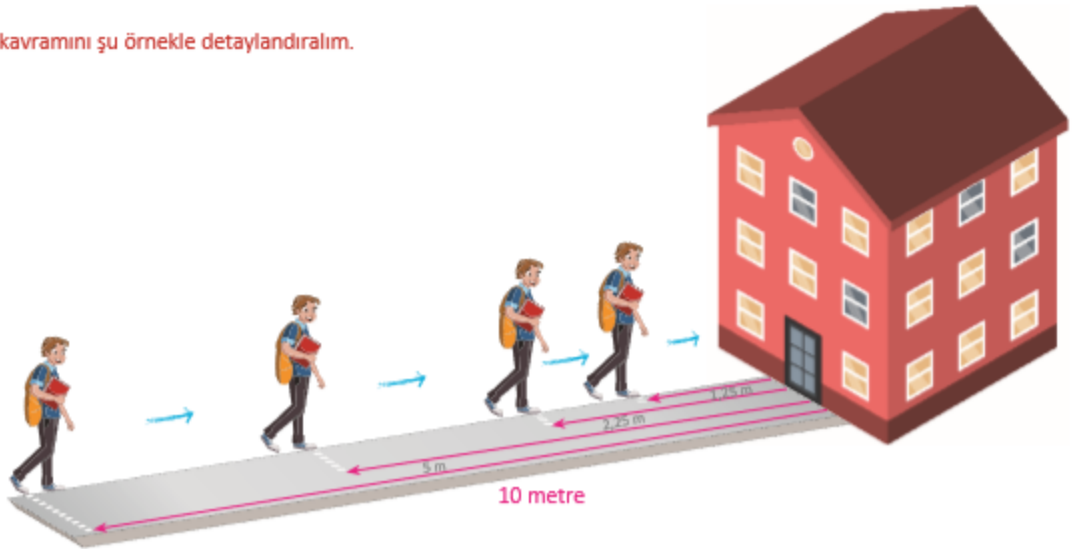
Arşimet bu düzgün çokgenlerin kenar sayısı arttıkça çevresinin ve alanının artışlarını gözlemlemiştir.

Buna göre, yukarıdaki gibi n kenarlı düzgün çokgenler, n 'nin sonsuza yaklaşan değerleri için çembere dönüşme yolunda emin adımlar atar.

Burada anlatılmak istenen ve sizden sorgulamanızı istediğimiz durum bir değişkendeki küçük ya da büyük değişimlerin bir sonuç oluşturmalarıdır. İşte bu yaklaşımın matematikteki anlamı **limit** ile ifade edilir.

Sonuç olarak limit, sonsuz küçük veya sonsuz büyük değerler için bir **yaklaşım** kavramıdır.

Limit kavramını şu örnekle detaylandıralım.



10 metre uzaklıkta kapısı açık bir eve gidip içeride birilerinin olup olmadığını kontrol etmek istiyorsunuz. Her seferinde bulunduğunuz noktadan eve olan mesafenin yarısı kadar yol almak zorunda olduğunuzu düşünün. Yani ilk molanızda 5 metre uzaktasınız (bu noktadan içeriye göremiyorsunuz.). İkinci molanızda 2,5 metre uzaktasınız (bu noktadan içeriye göremiyorsunuz.), 3. molada 1,25 metre uzaktasınız (bu noktadan da içeriye göremediğinizi düşünün.). Siz bu şekilde yolunuza devam ederseniz hiçbir zaman o evin kapısından içeriye giremezsiniz. Ancak çok ama çok yaklaşabilirsiniz. Evin kapısı sizin limitiniz olmuştur ve o noktadan daha öteye gidemezsiniz. Ama en azından kapıdan içeri baktığınızda evde birilerinin olup olmadığını söyleyebilirsiniz.



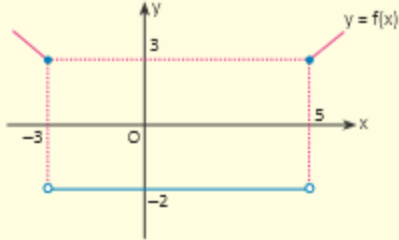
İşte limit sizi evin kapısına mümkün olduğu kadar yaklaştırarak evin içinde birilerinin olup olmadığını görmeye yardımcı olur. Limit, evin içine girmenize ilgilenmez. Çok yakında iken olayları gözlemlemeniz için kurulu bir düzeni vardır. Her zaman şartlar evin içinde olmanıza uygun olmayabilir ama bu limit için bir sorun oluşturmaz.



Uygulama

Örnek:

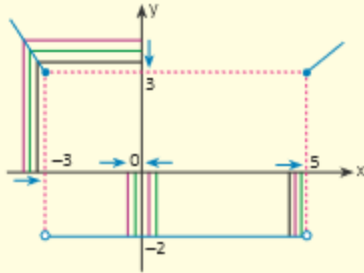
Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

ifadesinin değerini bulalım.



Grafikte görüldüğü gibi x değerleri artarak -3 'e yaklaşırsa $f(x)$ değerleri azalarak 3 'e yaklaştığından

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 3 \text{ bulunur.}$$

Grafikte görüldüğü gibi x değerleri artarak ve azalarak 0 'a yaklaşırsa $f(x)$ değerleri -2 'ye yaklaştığından

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \text{ bulunur.}$$

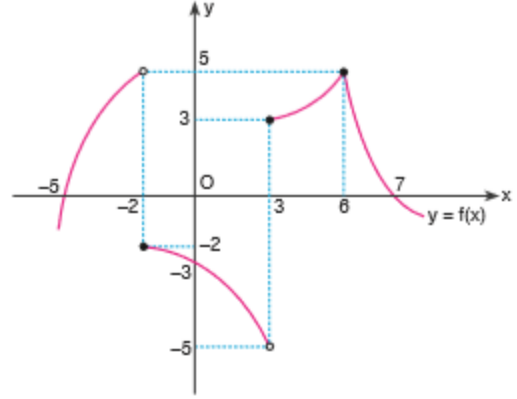
Grafikte görüldüğü gibi x değerleri artarak 5 'e yaklaşırsa $f(x)$ değerleri -2 'ye yaklaştığından

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -2 \text{ bulunur.}$$

$$\text{Bu durumda } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

$$= 3 + (-2) - (-2) = 3 \text{ bulunur.}$$

1. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



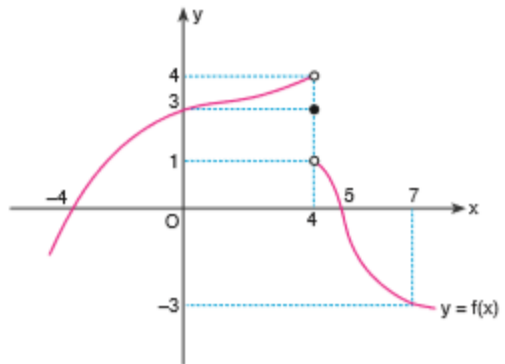
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 6} f(x)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

2. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



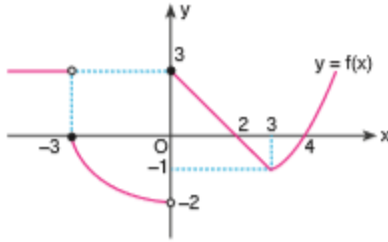
Buna göre, x 'in -4 , 0 , 4 , 5 ve 7 apseli noktalarında var olan limitlerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2



LİMİT KAVRAMI / Ustalık Testi

1. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



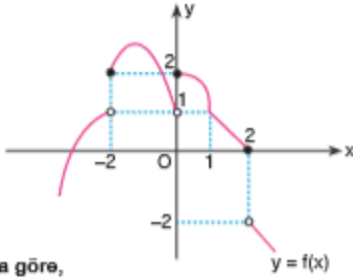
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

eşitliğini sağlayan a gerçel sayıların çarpımı kaçtır?

- A) -24 B) -16 C) -12 D) 8 E) 24

2. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (f \circ f)(x)$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

3. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için,

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 1$$

eşitlikleri verilmiştir.

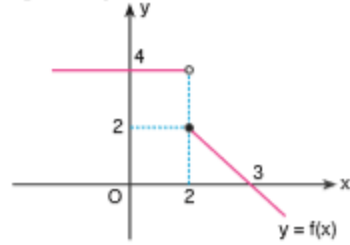
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(2x-1) + f(8-x)}{f(x^2-4)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

4. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



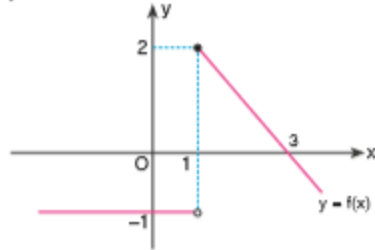
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(|x|)$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



f fonksiyonu yardımıyla g fonksiyonu her $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$g(x_0) = f\left(x_0 + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)\right)$$

Buna göre, $g(1)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı $f(x)$ doğrusal fonksiyonu için

$$f(-1) = 4$$

$$f(2) = 10$$

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

değeri kaçtır?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16



Uygulama

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}$$

limitinin değerini bulunuz.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğinden

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

limitine ulaşılır.

$x \rightarrow \pi^+$ ifadesi x açısının 180° den biraz büyük olduğunu gösterdiğinden x açısı 3. bölgede olup $\sin x$ ifadesi negatiftir.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\sin x}{\sin x} = -1$$

bulunur.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - \tan x}{\sin \frac{x}{2} - \sin x}$$

limitinin değerini bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - \tan x}{\sin \frac{x}{2} - \sin x} = \frac{2\cos \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}} = (1 - \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = 2$$

bulunur.

1.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos 2x}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) $-\sqrt{2}$ C) 0 D) $\sqrt{2}$ E) 2

2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin 2x}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos 2x}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$$

limitinin değeri kaçtır?

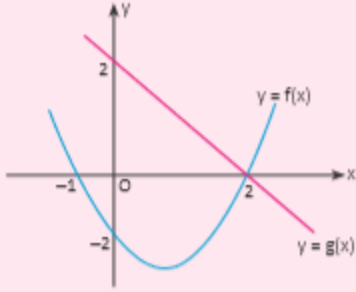
- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2



uygulama

Örnek:

Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ parabolü ve $y = g(x)$ doğrusu verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitinin değerini bulunuz.

$y = f(x)$ parabolünün denklemini yazarak başlayalım.

$$y = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \text{ ve parabol } (0, -2)$$

noktasından geçtiği için bu noktayı sağlamalıdır.

$$-2 = a \cdot (0 + 1) \cdot (0 - 2)$$

$$a = 1 \text{ olur.}$$

Bu durumda parabolün denklemini

$$y = 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \text{ olur.}$$

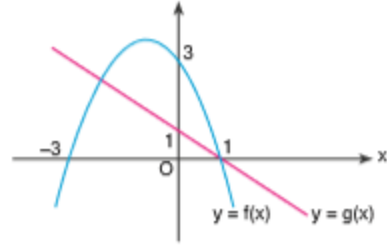
$y = g(x)$ doğrusunun denklemini

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} [-(x+1)] = -3$$

bulunur.

1. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ parabolü ve $y = g(x)$ doğrusu verilmiştir.



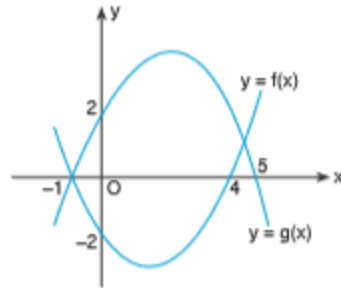
Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

2. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ parabolleri verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

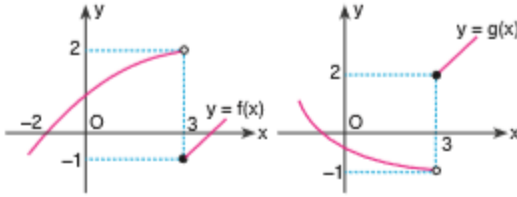
limitinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{25}{24}$ B) -1 C) $-\frac{23}{24}$
D) $-\frac{9}{24}$ E) $-\frac{1}{3}$



LİMİT - SÜREKLİLİK / Genel Tekrar Testi - 8

1. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre,

- I. $(f + g)(x)$
- II. $(f - g)(x)$
- III. $(g \circ f)(x)$

fonksiyonlarının hangileri $x = 3$ ağırlıklı noktada süreklidir?

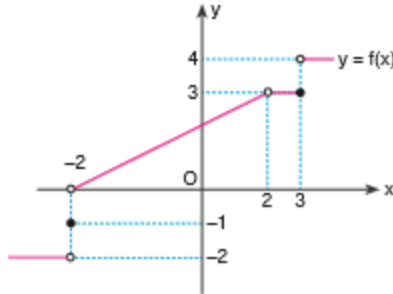
- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) II ve III

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{28-x}-3}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -27 B) -12 C) -9 D) -6 E) -3

3. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{f(x-1) - f(-x)}{f(x+3)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

4. $f(x) = x^2 + 3$ ve $g(x) = \frac{x-2}{x}$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(g \circ f)(x)]$$

limitinin değeri kaçtır?

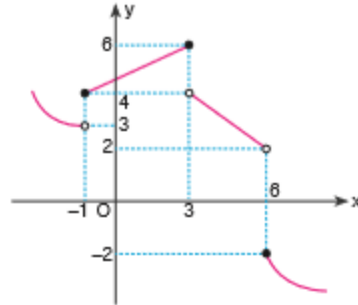
- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 0 D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x^2 - 5x + 4}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

6. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} (f \circ f)(x)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

7. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < 0 \\ x-2, & 0 \leq x < 1 \\ x+6, & x \geq 1 \end{cases}$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

işleminin değeri kaçtır?

- A) -10 B) -9 C) -8 D) -7 E) -6